Naizmenične struje

Opisivanje prostoperiodičnih veličina

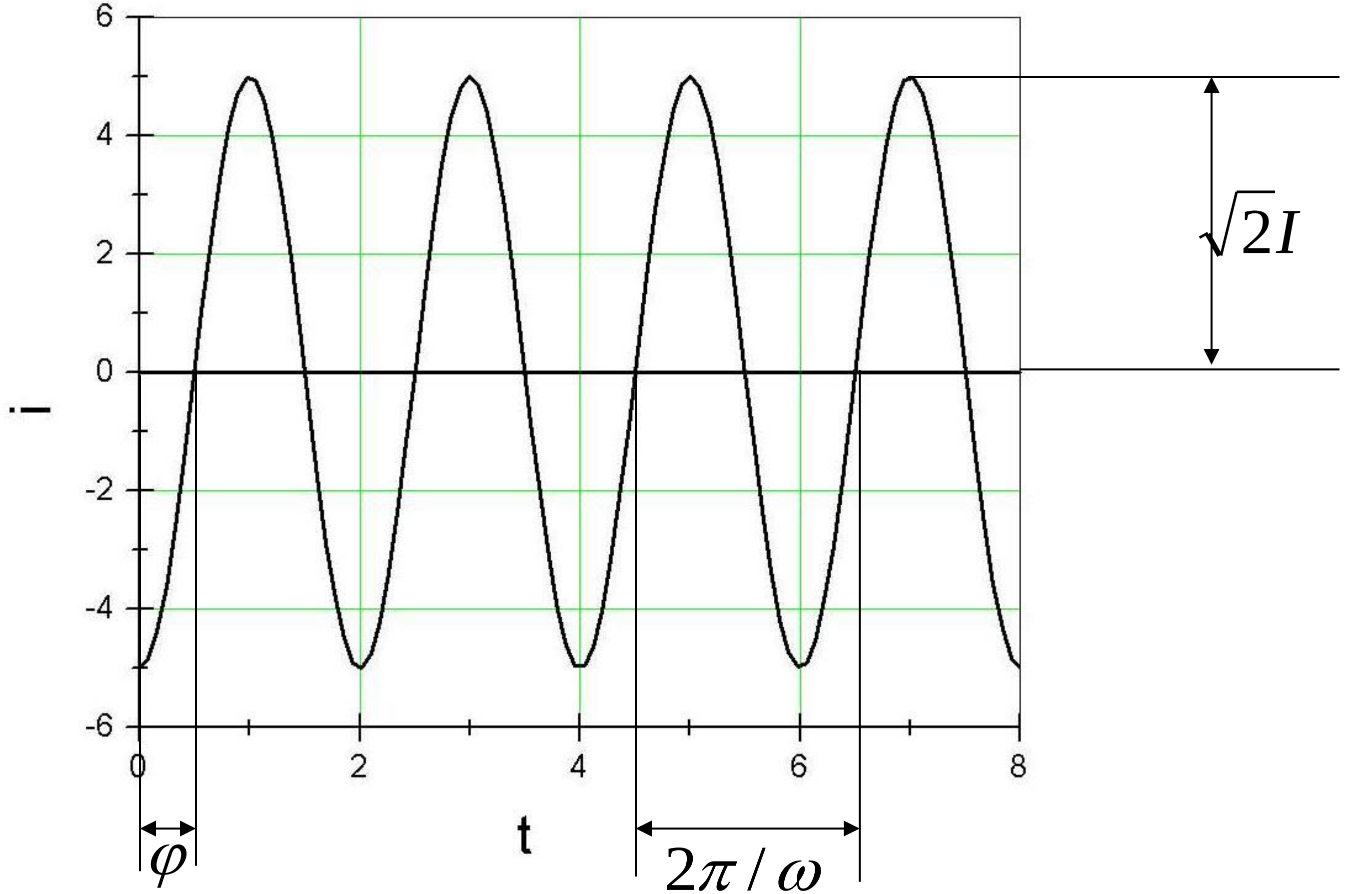
Metodi opisivanja

- Zadatak:
  - omogućiti efikasno rešavanje električnih kola
  - omogućiti efikasno proučavanje oscilatornih sistema
- Prostoperiodična veličina
  - amplituda (efektivna vrednost)
  - učestanost (kružna učestanost)
  - početna faza
- U kolima prostoperiodične struje sve veličine imaju istu frekvencu
  - amplituda (efektivna vrednost)
  - početna faza
- Metodi opisivanja
  - vremenski (trigonometrijski)
  - fazorski (geometrijski)
  - kompleksni (aritmetički)

Vremensko opisivanje

- Analitički prikaz trigonometrijskim funkcijama

$$\boxed{i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)}$$



Vremensko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t)=\sqrt{2}\cdot I_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_1)$$
$$i_2(t)=\sqrt{2}\cdot I_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_2)$$

$$i=i_1+i_2(t)$$
$$i=\sqrt{2}\cdot I\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$$

$$i_2(t)+i_2(t)=\sqrt{2}\cdot(I_1\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_1)+I_2\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi_2))=$$

$$=\sqrt{2}\cdot(I_1\cdot[\sin(\omega\cdot t)\cos(\varphi_1)+\cos(\omega\cdot t)\sin(\varphi_1)]+$$
$$+I_2\cdot[\sin(\omega\cdot t)\cos(\varphi_2)+\cos(\omega\cdot t)\sin(\varphi_2)])=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\{[I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)]\sin(\omega\cdot t)+[I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)]\cos(\omega\cdot t)\}$$

$$=\sqrt{2}\cdot\{[I\cdot\cos(\varphi)]\cdot\sin(\omega\cdot t)+[I\cdot\sin(\varphi)]\cos(\omega\cdot t)]\}$$

$$\boxed{\begin{aligned}I\cos(\varphi)&=I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)\\ I\sin(\varphi)&=I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)\end{aligned}}$$

Vremensko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

$$I^2=\left[I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)\right]^2+\left[I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)\right]^2$$

$$I=\sqrt{\left[I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)\right]^2+\left[I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)\right]^2}$$

$$\mathrm{tg}(\varphi)=\frac{I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)}{I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)}$$

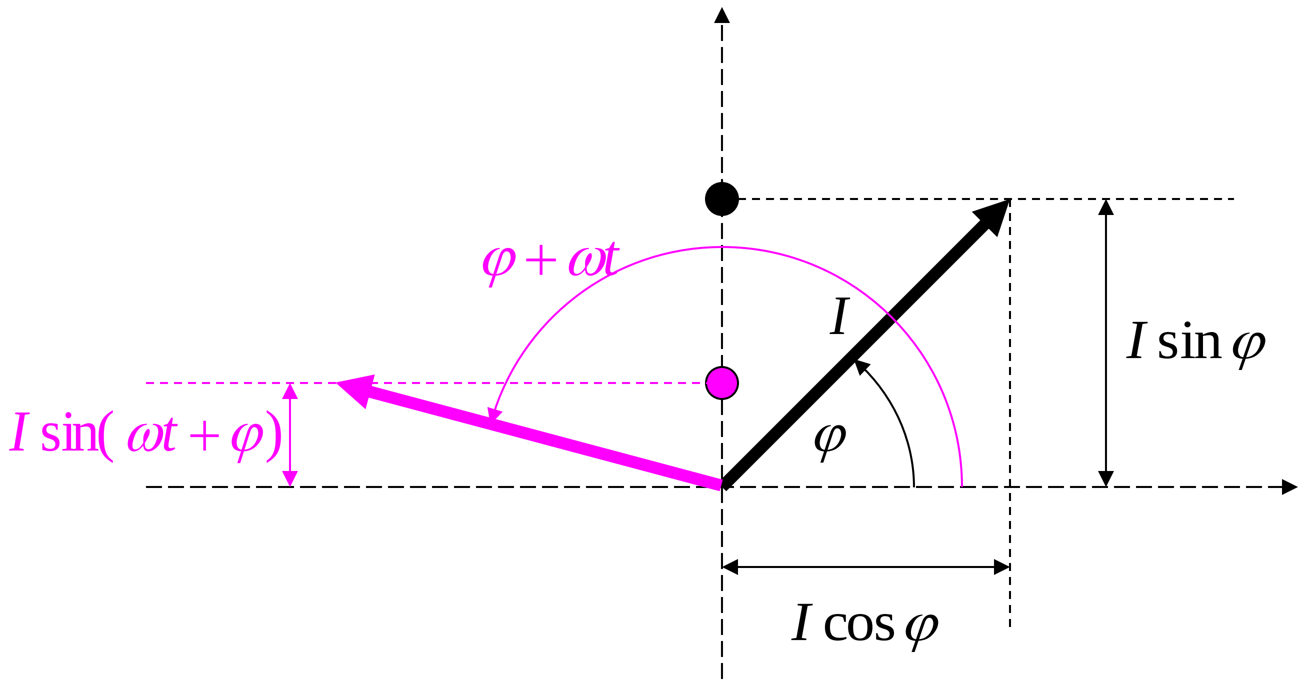
$$\varphi=\mathrm{arctg}\left(\frac{I_1\cos(\varphi_1)+I_2\cos(\varphi_2)}{I_1\sin(\varphi_1)+I_2\sin(\varphi_2)}\right)$$

Vremensko opisivanje

- Prednosti
  - jasan fizički smisao dobijenih rezultata
- Nedostaci
  - sporo
  - podložno greškama

Fazorsko opisivanje

- Grafički prikaz vektorima
- Fazor je vektor koji:
  - ima napadnu tačku u koordinatnom početku
  - se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω oko koordinatnog početka



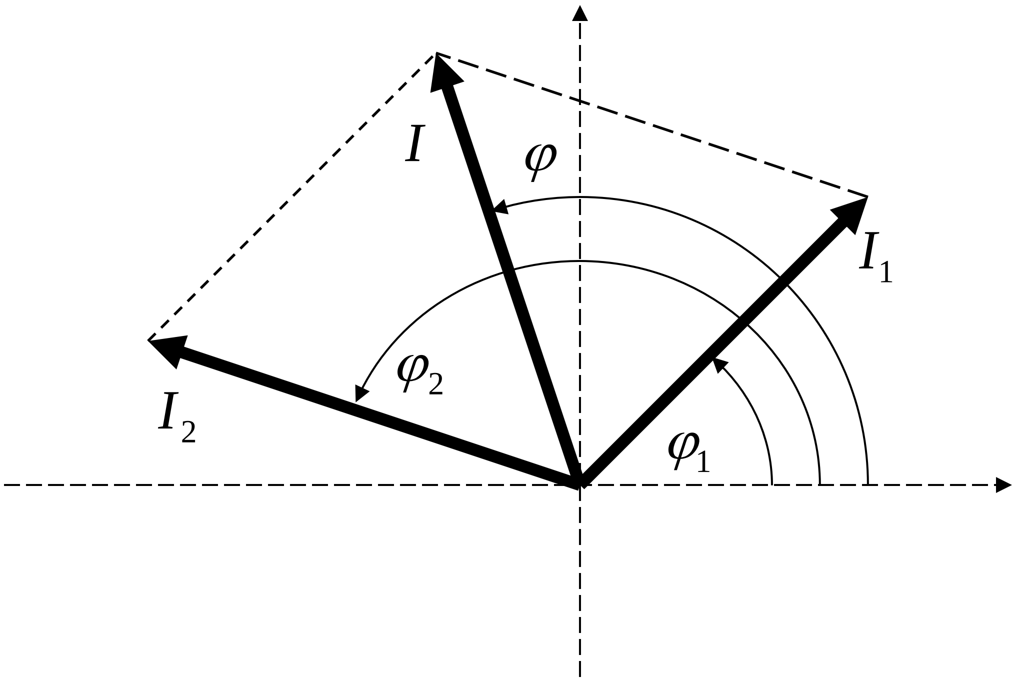
Fazorsko opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

$$\longrightarrow$$

$$i = i_1 + i_2(t)$$
$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$



$$\boxed{\begin{aligned} I_x &= I_{1x} + I_{2x} \\ I_y &= I_{1y} + I_{2y} \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

Fazorsko opisivanje

- Prednosti
  - brzo
- Nedostaci
  - ne uočava se fizička veza sa veličinama koji se proučavaju
  - crtež može da bude prenatrpan
  - problematično je precizno crtanje kada se crtane veličine mnogo razlikuju po redu veličine
  - ne uočava se lako međusobna zavisnost veličina

Impedancija

- Električna impedancija je omjer napona i struje

- $Z_{\mathrm{R}} = \frac{V_{\mathrm{r}}}{I_{\mathrm{r}}}$ e od realnog i imaginarnog dijela

$$z_e = \sqrt{r_e^2 + x_e^2}$$

$$\phi = \arctan \frac{x_e}{r_e}$$

Serijski spoj impedancija

- Kod serijskog spoja impedancija zbrajaju se realne i imaginarne komponente impedancije.

$$Z_{\mathrm{eq}} = Z_1 + Z_2 = (R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)$$

Paralelni spoj impedancija

- Vrijedi da je recipročna vrijednost paralelne impedancije jednaka sumi recipročnih vrijednosti pojedinačnih impedancija.

- No zbog kompleksnih vrijednosti, proračun je nešto složeniji.

$$Z_{\mathrm{eq}} = Z_1 \| Z_2 = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Paralelni spoj impedancija

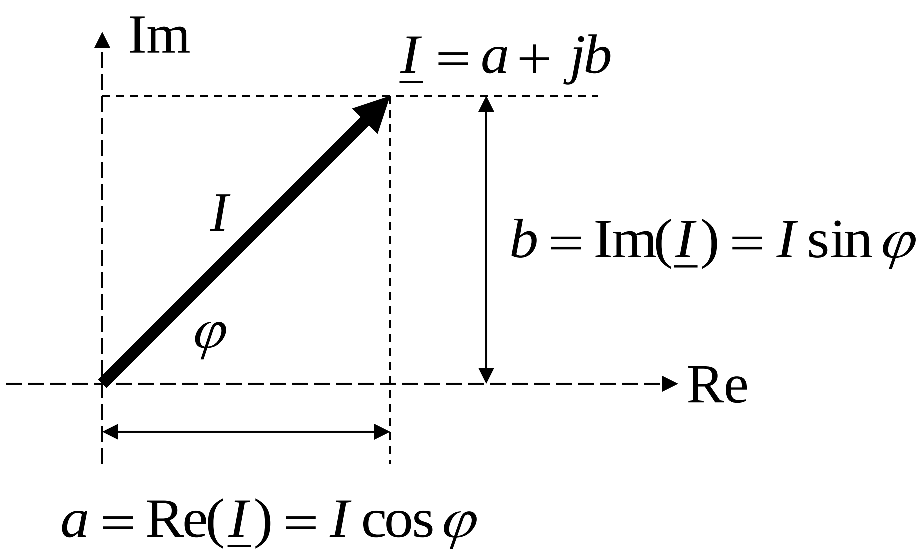
$$Z_{\text{eq}} = R_{\text{eq}} + jX_{\text{eq}}$$

$$R_{\text{eq}} = \frac{(X_1R_2 + X_2R_1)(X_1 + X_2) + (R_1R_2 - X_1X_2)(R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

$$X_{\text{eq}} = \frac{(X_1R_2 + X_2R_1)(R_1 + R_2) - (R_1R_2 - X_1X_2)(X_1 + X_2)}{(R_1 + R_2)^2 + (X_1 + X_2)^2}$$

Kompleksno opisivanje

- Prikaz fazora kompleksnim brojevima



$$\boxed{\begin{aligned} \underline{I} &= a + jb \\ a &= I \cdot \cos\varphi \\ b &= I \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

$$\boxed{\underline{I} = I \cdot e^{j\varphi}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathrm{tg}\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}}$$

Kompleksno opisivanje

- Primer: sabiranje dve prostoperiodične veličine (Kirhofovi zakoni)

$$i_1(t) = \sqrt{2} \cdot I_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)$$
$$i_2(t) = \sqrt{2} \cdot I_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_2)$$

$$\longrightarrow$$

$$i = i_1 + i_2(t)$$
$$i = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$\underline{I_1} = a_1 + jb_1 = I_1 \cos\varphi_1 + j \cdot I_1 \sin\varphi_1$$

$$\underline{I_2} = a_2 + jb_2 = I_2 \cos\varphi_2 + j \cdot I_2 \sin\varphi_2$$

$$\underline{I} = \underline{I_1} + \underline{I_2} = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{Re}(I) &= \mathrm{Re}(I_1) + \mathrm{Re}(I_2) \\ \mathrm{Im}(I) &= \mathrm{Im}(I_1) + \mathrm{Im}(I_2) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I\cos(\varphi) &= I_1\cos(\varphi_1) + I_2\cos(\varphi_2) \\ I\sin(\varphi) &= I_1\sin(\varphi_1) + I_2\sin(\varphi_2) \end{aligned}}$$

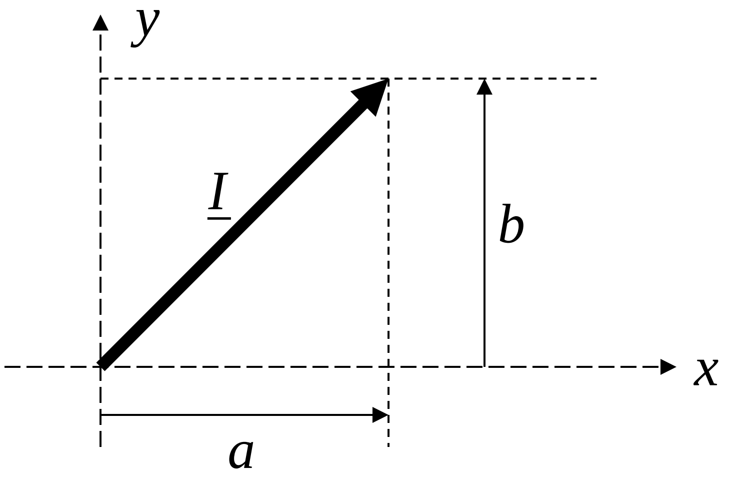
Kompleksno opisivanje

- Prednosti
  - brzo
  - matematički jednostavno
  - lako se uočavaju zavisnosti među veličinama
- Nedostaci
  - kompleksni broj u algebarskom obliku nema direktno fizičko objašnjenje

Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog oblika u fazorski oblik
  - realni deo kompleksnog broja je x projekcija fazora
  - imaginarni deo kompleksnog broja je y projekcija fazora

$$\underline{I} = a + jb$$



Transformacije opisa

- Transformacija kompleksnog u vremenski

$$\underline{I} = a + jb$$

$$I = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \varphi = \mathrm{arctg}\frac{b}{a}$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}.\sin(\omega t + \mathrm{arctg}\frac{b}{a})$$

Transformacije opisa

- Transformacija vremenskog u kompleksni

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = I \cdot \cos\varphi \quad b = I \cdot \sin\varphi$$