

**Рјешења задатака на пријемном испиту 30.06.2014.**

**Задатак 1.** (6 бодова) Аутобуска карта од бања Луке до Бијељине кошта 42.50 КМ. Студенти имају право на повластицу од 23% од регуларне цијене карте. Колики ПДВ (ПДВ = Порез на додатну вриједност је 17%), у апсолутном износу, плаћају студенти на једну купљену карту?

**Одговор.** Цијена карте је 42.50 КМ.

$$\begin{aligned} \text{Попуст} & 23\% \\ \text{Рачун:} & 42.50 \text{ КМ} \cdot (1 - 0.23) = 42.50 \text{ КМ} \cdot 0.77 = 32.725 \text{ КМ} \\ \text{ПДВ} & 17\% \\ \text{Рачун:} & 32.725 \text{ КМ} = (\text{цијена карте без ПДВ-а}) + (\text{цијена карте без ПДВ-а}) \cdot 0.17 \\ & 32.725 \text{ КМ} = (\text{цијена карте без ПДВ-а}) \cdot 1.17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{цијена карте без ПДВ-а}) &= \frac{32.725 \text{ КМ}}{1.17} \cong 27.97 \text{ КМ} \\ \text{ПДВ на } 27.97 \text{ КМ} &\text{ је } 27.97 \cdot 0.17 \cong 4.75491 \text{ КМ.} \end{aligned}$$

**Задатак 2.** (6 бодова) За кружнице  $K_1(O,3)$  (кружница са центром у тачки  $O$  и полупречником 3 цм) и  $K_2(S,4)$  (кружница са центром у тачки  $S$  и полупречником 4 цм) одредит количник  $q$  и зазлик  $d$  између количника пречника и обима ове двије кружнице.

**Одговор.** Количник обима сваке кружнице и пречника те кружнице је (ирационалан) број  $\pi$ . Дакле, количник пречника и обима ове двије (горе наведене) кружнице је  $\frac{1}{\pi}$ . Према томе,

$$q = \frac{1}{\pi} : \frac{1}{\pi} = 1, \quad d = \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} = 0.$$

**Задатак 3.** (6 бодова) У квадрату странице 1 цм израчунати дијагоналу  $d$ . Заокружи тачан одговор: (а)  $d$  је рационалан број 2.414; (б)  $d$  је децималан број 2.4142; (в)  $d$  је реалан број 2.41421; (г) није ни једно од претходно поменутих одговора.

**Одговор.** Како је  $d = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ , треба одговорити на питање какав је број  $\sqrt{2}$ . Прво,  $\sqrt{2}$  је реалан број јер предстаља дужину реалне дужи (дијагонале квадрата). Зна се да реалан број јесте рационалан или ирационалан (и да не може бити истовремено и једно и друго). Претпоставимо да је  $\sqrt{2}$  рационалан број, тј. претпоставимо да се може написати у облику разломка  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  (при чему су  $a$  и  $b$  **релативно прости природни бројеви**). Тада би било  $2 = \frac{a^2}{b^2}$ , одакле би слиједило да је  $a^2 = 2b^2$ , тј. број  $a^2$  је паран природан број. Тада би и број  $a$  био такође паран природан број. Заиста, ако би број  $a$  био непаран број, било би:

$$a = 2n + 1 \Rightarrow a^2 = (2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

одакле закључујемо да би и број  $a^2$  био непаран природан број. То је немогуће јер је број  $a^2$  паран. Дакле, мора бити  $a = 2u$  (за неки природан број  $u$ ). Даље би, из  $(2u)^2 = 2b^2$  слиједило  $4u^2 = 2b^2$ , односно  $b^2 = 2u^2$  па би опет закључили да је и број  $b^2$  паран природан број, што би опет давало да је и број  $b$  паран природан број, рецимо  $b = 2v$ . Као закључак имамо да су бројеви  $a$  и  $b$  истовремено релативно прости и нису релативно прости што је контрадикција (немогућа ситуација). Зато, претпоставку која нас је доваела ову немогућу ситуацију, „Претпоставимо да је  $\sqrt{2}$  рационалан број“ треба добацити. Коначно имамо: Број  $\sqrt{2}$  није рационалан број.

**Задатак 4.** (6 бодова) Фабрика располаже металном траком дужине 3.15 м и ширине 1.75 м. Колика је материјала, у кантриметрима квадратним, употребљено за производњу финалног производа (у четири корака) ако је коефицијент искористивости по корацима слиједећи: 98%, 72%, 69% и 83% респективно.

**Одговор:**  $3.15 \text{ м} \cdot 1.75 \text{ м} = 315 \text{ цм} \cdot 175 \text{ цм} = 55125 \text{ цм}^2$   
 $55125 \text{ цм}^2 \cdot 0.98 \cdot 0.72 \cdot 0.69 \cdot 0.83 = 22275.85374 \text{ цм}^2$ .

**Задатак 5.** (6 бодова) Колико је растојање између тачака  $A = (2, 3, 4)$  и  $B = (4, 3, 2)$  ?

**Одговор:**  $d = \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = \sqrt{8}$ .

**Задатак 6.** (6 бодова) Ријешити неједначину  $\frac{4-3x}{x-2} \geq 2$ .

**Одговор.**

*Први корак:* Разломак на лијевој страни неједначине је детерминисан уз услов:  $x - 2 \neq 0$ . Дакле,  $x \neq 2$ .

*Други корак:*

$$\frac{4-3x}{x-2} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{x-2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-3x}{x-2} - \frac{2x-4}{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8-5x}{x-2} \geq 0.$$

*Трећи корак:* Алгебарски разломак  $\frac{8-5x}{x-2}$  је ненегативан ако и само ако су и бројник и називник истог знака.

Дакле:

$$(1) \quad 8 - 5x \geq 0 \wedge x - 2 > 0 \quad \text{или} \quad (2) \quad 8 - 5x \leq 0 \wedge x - 2 < 0$$

Имамо:

$8 - 5x \geq 0$	$x - 2 > 0$	$8 - 5x \leq 0 \wedge x - 2 < 0$
$-5x \geq -8$	$x > 2$	$-5x \leq -8 \quad x < 2$
$x \leq \frac{8}{5}$		$x \geq \frac{8}{5}$
$x \in \emptyset$		$\frac{8}{5} \leq x < 2.$

**Задатак 7.** (6 бодова) Ако је  $a$  позитиван реалан број, детерминиши степен  $a^x$  ако је: (1)  $x$  је природан број; (2)  $x$  је негативан цијели број; (3)  $x$  је рационалан број; (4)  $x$  је ирационалан број.

**Одговор:** (0) Мора бити  $a > 0$  и  $a \neq 1$ .

(1) Ако је  $x$  природан број, тада је  $a^x = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  при чему има онолико множилаца колики је природан број  $x$ .

(2) Ако је  $x = 0$ , тада је  $a^0 = 1$ .

(3) Ако је  $x = -k$  негативан цијели број, тада је  $a^x = \frac{1}{a^k}$ , при чему је  $a^k$  објашњено у тачки (1).

(4) Ако је  $x = \frac{z}{m}$  рационалан број при чему је  $m$  природан број, тада је  $a^x = \sqrt[m]{a^z}$  ( $m$ -ти аритметички корјен ненегативног реалног броја  $a^z$ ).

(5) Ако је  $a > 1$ , тада је  $a^x = \sup\{a^r : r \in \mathbf{Q} \wedge r < x\}$ . Ако је  $1 < a < 1$ , тада је  $a^x = \inf\{a^r : r \in \mathbf{Q} \wedge r < x\}$ .

**Задатак 8.** (6 бодова) Ако у поља на шаховској плочи стављамо зрна кукуруза почевши од 1 зрна на првом пољу а у сваком слиједећем пољу дупло, колико зрна кукуруза има на последњем пољу, а колико зрна кукуруза има на шаховској плочи?

**Одговор:** На прво поље стављамо 1 ( $= 2^0$ ) зрно, на друго поље стављамо  $2^1$  зрна, на треће поље стављамо  $2^2$  зрна, на четврто поље стављамо  $2^3$  зрна. Ако овако наставимо, на 64-о поље стављамо  $2^{63}$  зрна кукуруза. То је геометријска прогресија са количником  $q = 2$ . Укупно зрна на шаховској плочи је

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1.$$