

Рјешења задатака са пријемног теста из Математике (01.09.2014.)

Задатак 1. (5 бодова) (Аритметичко мишљење)

Дати су објекти: 2, -2, 0, $\frac{3}{7}$, e , α , π , $\sqrt{2}$, $7 - 4i$, $\sqrt[3]{7}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Који од њих су природни, који цијели, који рационални, који ирационални, а који комплексни бројеви?

Одговор: 1.1. Природан број је: 2

1.2. Цијели бројеви су: 2, -2, 0

1.3. Рационални бројеви су: 2, -2, 0, $\frac{3}{7}$

1.4. Ирационални бројеви су:

- $\pi \approx 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ 41971\ 69399 \dots$ (π је ирационалан број и дефинише се као количник обима и пречника било које кружнице. π је такође познат и као *Архимедова константа* (не треба га мијешати са Архимедовим бројем) или *Лудолфов број*).

- $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ (Корјенови простих бројева су ирационални бројеви.)

- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874 \dots$ (Број e , као математичка константа, још је познат као и *мали Ојлеров број* и/или *Неперова константа*.)

1.5. Комплексни број је: $7 - 4i$

1.6. Симбол α није број.

Задатак 2. (3 бода) (Аритметичко-раноалгебарско мишљење) Одреди тачност / нетачност слиједећих исказа:

2.1. *Паран број* је природан број који се може представити као збир два иста природна броја.

2.2. *Паран број* је природан број који је дјелјив бројем 2.

2.3. *Прост број* је природан број који је дјелјив самим собом и бројем 1.

Одговор: Исказ 2.1. је дефиниција концепта *парног броја* и не може се говорити о тачности или нетачности дефиниције, већ о њеној коректности или некоректности. Ово је коректна дефиниција концепта *паран број*.

2.2. Тврдња 2.2. је тачан исказ: *Природан број је паран број ако и само ако је дјелјив бројем 2.*

2.3. Исказ 2.3. је нетачан исказ јер је сваки број дјелјив самим собом и јединицом. Коректан исказ гласи: *Прост број је природан број ако је дјелјив само самим собом и бројем 1.* То је коректна дефиниција концепта *прост број*.

Задатак 3. (6 бодова) (Алгебарско мишљење) Покажи да

3.1. Ако је природан број n паран, тада је и његов квадрат n^2 такође паран број.

3.2. Ако је природан број n непаран, тада је и његов квадрат n^2 такође непаран број.

Одговор.

3.1. Нека је n паран број. Тада се може представити у облику $n = 2u$ (за неки природан број u). Даље, је:

$$n^2 = (2u)^2 = 4u^2 = 2(2u^2) = 2u^2 + 2u^2.$$

Како је квадрат n^2 природног броја n дјелјив бројем 2, он је такође паран природан број.

3.2. Нека је n непаран природан број. Тада се може представити у облику $n = 2u - 1$ (за неки природан број u). Даље, из

$$n^2 = (2u - 1)^2 = 4u^2 - 4u + 1 = 2(2u^2 - 2u + 1) - 1.$$

закључујемо да је n^2 такође непаран природан број.

Задатак 4. (8 бодова) (Логичко мишљење) Покажи да:

4.1. Ако квадрат n^2 природног броја n није паран број, тада ни сам број n није паран број.

4.2. Ако квадрат n^2 природног броја n јесте паран број, тада је и сам број n такође паран број.

Одговор.

4.0. Искизи $A \Rightarrow B$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$ (Контрапозиција тврдње $A \Rightarrow B$) су логички еквивалентни. Тврдња $A \Rightarrow B$ је (не)тачна ако и само ако је тврдња $\neg B \Rightarrow \neg A$ (не)тачна.

4.1. Контрапозиција тврдње 3.1. 'Ако је природан број n паран, тада је и његов квадрат n^2 такође паран број.' гласи:

Ако квадрат n^2 природног броја n није паран број, тада ни сам број n није паран број.

Будући да је тврдња 3.1. тачна тврдња (Показано у Задатку 3.), то је и ова тврдња тачна.

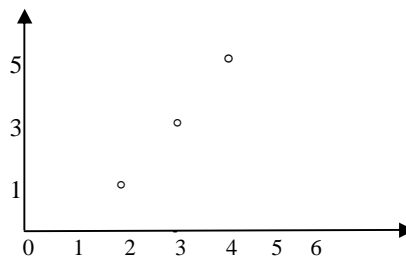
4.2. Контрапозиција тврдње 3.2. 'Ако је природан број n није паран, тада је и његов квадрат n^2 такође није паран број.' гласи:

Ако квадрат n^2 природног броја n није непаран број, тада ни сам број n није непаран број.

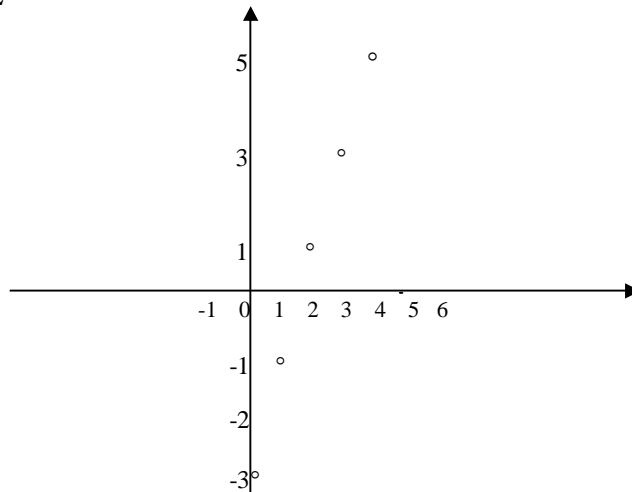
Будући да је тврдња 3.2. тачна тврдња (Показано у Задатку 3.), то је и ова тврдња тачна такође.

Задатак 4. (9 бодова) (Напредније алгебарско мишљење) Скицирај графове слиједећих функција: 4.1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{N}$; 4.2. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{Z}$; 4.3. $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{R}$.

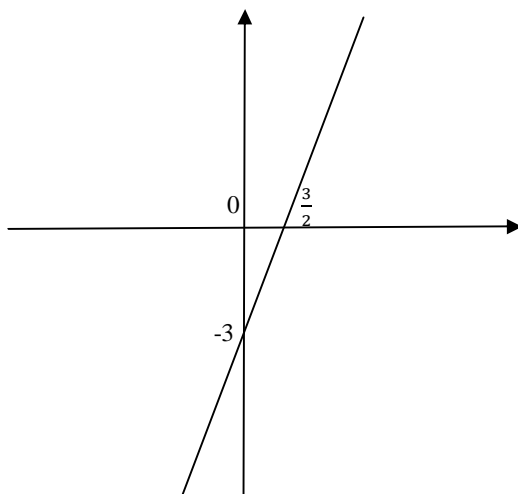
Одговор. 4.1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{N}$



4.2. $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{Z}$



4.3. $h : \mathbb{R} \ni x \rightarrow 2x - 3 \in \mathbb{R}$.



Задатак 5. (5 бодова) (Геометријско мишљење) Одредити тачност / нетачност (односно, коректност / некоректност) слиједећих исказа:

- 5.1. *Многостраник* је затворена изломљена линија.
- 5.2. *Четвоространик* је многостраник који има само четири странице.
- 5.3. Правоугаоник је четвоространик.
- 5.4. Квадрат је правоугаоник.
- 5.5. Правоугаоник никад није квадрат.

Одговор.

- 5.1. Исказ 5.1. је коректна дефиниција многостраника / многоугла.
- 5.2. Исказ 5.2. је коректна дефиниција четвоространика / четвороугла.
- 5.3. Исказ 5.3. је тачна тврдња.
- 5.4. Исказ 5.4. је тачна тврдња.
- 5.5. Правоугаоник не мора бити квадрат (Кад су му сусједне странице неједнаке дужине) али може бити (Кад су му сусједне странице једнаке дужине.) Према томе, исказ 5.5. (генерално говорећи) није тачан.

Задатак 6. (10 бодова) (Напредније геометријско мишљење) Опиши класификацију четвоространика и за сваку од класа наведи примјере.

Одговор.

Класификација четвоространика врши се према слиједећим критеријима:

Критериј А: Број парова паралелних страница

A2: Четвоространик има два пара паралелних страница – то су *паралелограми* (примјери: *ромб* и *ромбоид*).

A1: Четвоространик има један пар паралелних страница – то су *трапези*.

A0: Четвоространик нема ни један пар паралелних страница.

Критериј Б: Број правих углова као унутрашњих углова четвоространика.

B0. Четвоространик нема правих углова.

B1. Четвоространик има један прави угао.

B2. Четвоространик има два права угла. (На примјер – *правоугли трапез*)

B4. Четвоространик има четири права угла. (На примјер – *квадрат* и *правоугаоник*)

Критериј В: Међусобни однос сусједних страница четвоространика. (Четвоространик који има два пара једнаких сусједних страница је *делтоид*. На примјер, квадрат и ромб су делтоиди. Има делтоида који нису ни квадрат ни ромб.)

Задатак 7. (4 бода) (Скуповно-релацијско мишљење) За скупове $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$, $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ одредити: 7.1. $A \cup B$; 7.2. $A \cap B$; 7.3. $A \setminus B$; 7.4. $B \setminus A$.

Одговор.

7.0. $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{a \in \mathbf{N} : (\exists u \in \mathbf{N})(a = 2u)\}$; $B = \{4, 8, 12, 16, \dots\} = \{b \in \mathbf{N} : (\exists v \in \mathbf{N})(b = 4v)\}$; $B \subset A$.

7.1. $A \cup B = A$;

7.2. $A \cap B = B$;

7.3. $A \setminus B = \{2, 6, 10, 14, \dots\} = \{x \in \mathbf{N} : (\exists u \in \mathbf{N})(x = 2u) \wedge \neg(\exists v \in \mathbf{N})(x = 4v)\}$;

7.4. $B \setminus A = \emptyset$.